Hinweise für Schüler

Aufgabenauswahl:
Die Arbeit besteht aus einem Pflichtteil und einem Wahlteil.
Die Pflichtaufgaben **P1**, **P2** und **P3** sind vollständig zu bearbeiten.
Von den drei Wahlaufgaben **W1**, **W2** und **W3** sind zwei auszuwählen und zu lösen.

Bearbeitungszeit:
Die Arbeitszeit beträgt 210 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl.

Hilfsmittel:
- das an der Schule eingeführte Tafelwerk
- der an der Schule zugelassene Taschenrechner ohne CAS
- Zeichengeräte
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Hinweise:
Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen.

In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa drei Viertel des zu erreichenden Gesamtumfanges beinhaltet.

Sonstiges:
Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei

- guter Notation und Darstellung,
- eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen,
- vollständiger Lösung einer dritten Wahlaufgabe.

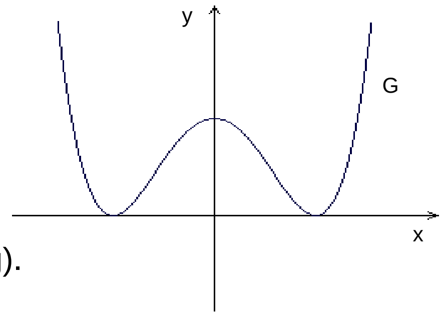
Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Verstößen gegen mathematische Korrektheit abgezogen werden.

P1 Analysis

Gegeben ist eine Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2 \quad \text{mit} \quad x \in R.$$

Der Graph der Funktion f ist G (siehe Abbildung).



1.1 Berechnen Sie für G die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die der lokalen Extrempunkte.

1.2 Der Graph G und die Abszissenachse begrenzen eine Fläche A vollständig. Geben Sie eine Stammfunktion von f an und berechnen Sie den Inhalt der Fläche A.

1.3 Im Punkt $P(\frac{1}{2} \mid f(\frac{1}{2}))$ wird eine Tangente t an G gelegt.
Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung für t und die Größe des Winkels, unter dem t die x-Achse schneidet.

P2 Analytische Geometrie

Ein gerader Pyramidenstumpf ist durch folgende Eckpunkte gegeben:

A(7 | 1 | -1), B(7 | 9 | -1), C(3 | 9 | -1), D(3 | 1 | -1), E(6 | 3 | 7), F(6 | 7 | 7),

G(4 | 7 | 7) und H.

2.1 Stellen Sie den Pyramidenstumpf in einem kartesischen Koordinatensystem dar. Geben Sie die Koordinaten des Punktes H an.

2.2 Die Geraden g_{AE} und g_{BF} schneiden einander in einem Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S.

2.3 Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche BCGF mit der Grundfläche ABCD einschließt.

P3 Stochastik

Für die Qualitätskontrolle eines Produktes werden drei Gütemerkmale beurteilt. Die Prüfung der Merkmale wird unabhängig voneinander durchgeführt. Aus Erfahrung weiß man, dass das erste Merkmal mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % positiv beurteilt wird, das zweite mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % und das dritte mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %.
Werden alle drei Merkmale positiv beurteilt, dann ist das Produkt Erste Wahl, bei Zweiter Wahl müssen zwei positive Bewertungen vorliegen.

3.1 Zeichnen Sie ein vollständiges Baumdiagramm für diese Prüfung und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

3.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Produkte als Erster bzw. Zweiter Wahl eingestuft werden.

3.3 Es werden 5000 Produkte hergestellt.
Berechnen Sie die Anzahl der zu erwartenden Produkte Erster Wahl.

W1 Analysis

Zwischen dem Luftdruck p und der Höhe h gilt unter der Annahme konstanter Lufttemperatur der folgende Zusammenhang (barometrische Höhenformel):

$$p = f(h) = p_o \cdot e^{-\frac{h}{b}} \quad \text{mit } h \in R, \quad h \geq 0.$$

Dabei sind

p_o : Luftdruck an der Erdoberfläche, $p_o = 101325$ Pa
h : Höhe gemessen über dem Meeresspiegel in km
b : Konstante ($b = 7{,}991$ km).

Der Graph von f ist G.

1.1 Berechnen Sie jeweils den Luftdruck, der in folgenden Höhen herrscht:

$h_1 = 4{,}808$ km (Montblanc),
$h_2 = 8{,}850$ km (Mount Everest) und
$h_3 = 15$ km.

Zeichnen Sie G im Intervall $0 \text{ km} \leq h \leq 15 \text{ km}$.

1.2 Ermitteln Sie rechnerisch, in welcher Höhe der Luftdruck halb so groß wie an der Erdoberfläche ist.

1.3 Durch p wird der Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe angegeben. Stellen Sie die barometrische Höhenformel nach h um.

1.4 Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit der Gleichung

$F(h) = b \cdot p_0 \cdot (1 - e^{-\frac{h}{b}})$ eine Stammfunktion von f(h) ist.

Für den Mittelwert p_M des Luftdrucks im Intervall $h_r \leq h \leq h_s$ gilt:

$$p_M = \frac{1}{h_s - h_r} \cdot \int_{h_r}^{h_s} f(h)dh.$$

Berechnen Sie p_M für das Intervall $0 \text{ km} \leq h \leq 8 \text{ km}$.

Geben Sie die prozentuale Abweichung des Mittelwertes p_M vom Wert des Luftdrucks auf dem Montblanc an.

W2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Dreieck ABC durch die Punkte A(4 | 2 | 2), B(10 | 8 | 2) und C(4 | 8 | 2) gegeben.

2.1 Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

- A, B und C sind Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks.
- Der Punkt S(6 | 6 | 2) ist Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

2.2 Gegeben sind die Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R}.$$

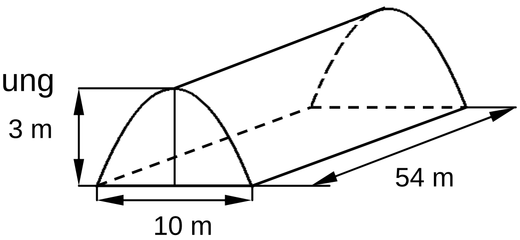
Untersuchen Sie die Lage der Geraden g und h zueinander.

2.3 Die Punkte A, B, C und P(6 | 6 | 8) sind Eckpunkte einer Pyramide.
Zeichnen Sie die Pyramide in einem kartesischen Koordinatensystem.
Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

2.4 Berechnen Sie die Größe des Winkels $\measuredangle$ APB.
Ermitteln Sie die z-Koordinaten aller Punkte Q(6 | 6 | z) so, dass die Größe des Winkels $\measuredangle$AQB 90° beträgt.

W3 Analysis/Stochastik

Eine Gärtnerei möchte in einem Folienzelt mit der Zucht von Tulpen beginnen. Das Zelt ist 54 m lang, 10 m breit und hat in der Mitte eine Höhe von 3 m. Die Begrenzungskurve des Folienzeltes ist eine Parabel (siehe Abbildung, nicht maßstabsgerecht).



3.1 Bestimmen Sie rechnerisch eine Funktionsgleichung für die Begrenzungskurve

(mögliche Lösung: $f(x) = -\frac{3}{25}x^2 + 3$).

3.2 Berechnen Sie den Rauminhalt des Zeltes.

3.3 In die Vorder- und Rückwand des Zeltes soll jeweils eine rechteckige Toröffnung eingebaut werden.
Berechnen Sie Höhe und Breite der Öffnung so, dass diese Fläche maximal wird.

3.4 Ein Fachhändler bietet Tulpenzwiebeln an, von denen ca. 70 % der Sorte A angehören. Im Verkauf werden Packungen mit 50 unsortierten Tulpenzwiebeln angeboten. Die Zwiebeln sind nicht unterscheidbar.

3.4.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung mehr als 30, aber höchstens 45 Tulpenzwiebeln der Sorte A sind.

3.4.2 Eine Gärtnerei benötigt für einen Kundenauftrag etwa 1000 Tulpenzwiebeln der Sorte A.
Wie viele Packungen sollten im Mittel erworben werden?
Ermitteln Sie den Gesamtpreis, wenn eine Packung 11,99 € kostet.

3.4.3 Ein anderer Fachhändler bietet unsortierte Tulpenzwiebeln in Packungen zu je 50 Stück für einen um 15 % höheren Preis an.
Er verspricht einen Anteil der Sorte A von 80 %.
Ist es für den Gärtner günstiger für den Kundenauftrag (siehe 3.4.2) bei diesem Händler zu kaufen, wenn er eine Tulpe der Sorte A zu 0,60 € und die anderen zu 0,40 € verkaufen kann?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(Tabelle s. Seite 7)

Tabelle für die Binomialverteilung

$$F_{n;p}(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \quad \text{(Summenverteilung)}$$

k	$F_{50;0,7;k}$
...	...
22	0,9999
23	0,9997
24	0,9991
25	0,9976
26	0,9944
27	0,9877
28	0,9749
29	0,9522
30	0,9152
31	0,8594
32	0,7822
33	0,6839
34	0,5692
35	0,4468

k	$F_{50;0,7;k}$
34	0,5692
35	0,4468
36	0,3279
37	0,2229
38	0,1390
39	0,0789
40	0,0402
41	0,0183
42	0,0073
43	0,0025
44	0,0007
45	0,0002
46	0,0000
47	0,0000
...	...

Hinweis: Bei $P \geq 0{,}5$ gilt $F_{n;p}(k)$ = 1 – abgelesener Wert